Tarea 13 LCAT

Sección 7.2: 2,3,4,5,7,9,10,12,14,16



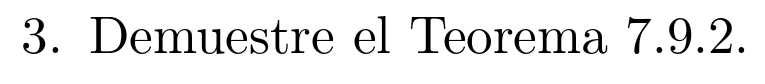
Imagen que contiene Texto

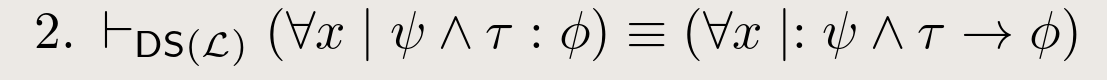
Descripción generada automáticamente

∀x ∀x ɸ

≡ Bx1, ɸ por ∀x ɸ, x no está libre en ∀x ɸ porque el para todo lo acota siempre

∀x ɸ





(∀x ∣ ψ Ʌ τ : ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x (ψ Ʌ τ) → ɸ)

≡ Identidad de →

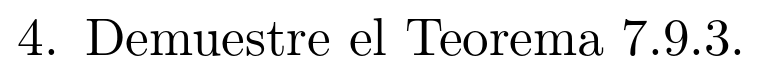
(∀x true → ((ψ Ʌ τ) → ɸ))

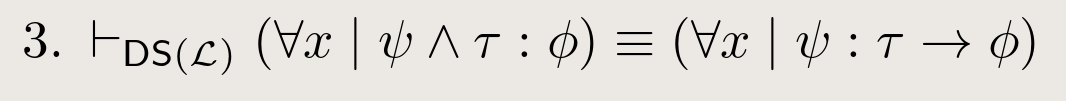
≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ true : ((ψ Ʌ τ) → ɸ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣: ((ψ Ʌ τ) → ɸ))





(∀x ∣ ψ Ʌ τ : ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ (ψ Ʌ τ) → ɸ)

≡ Teorema 4.31.5

(∀x ∣ ψ → (τ → ɸ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ ψ : (τ → ɸ))

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

(∀x ∣ ψ : ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ ψ → ɸ)

≡ Axioma 13

(∀x ∣ (ψ ∨ ɸ) ≡ ɸ)

≡ Identidad →

(∀x ∣ true → (ψ ∨ ɸ) ≡ ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ true : (ψ ∨ ɸ) ≡ ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣: (ψ ∨ ɸ) ≡ ɸ)

(∀x ∣ ɸ : (ψ → τ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ ɸ → (ψ → τ))

≡ Teorema 4.31.5

(∀x ∣ (ɸ Ʌ ψ) → τ))

≡ Identidad →

(∀x ∣ true → (ɸ Ʌ ψ) → τ))

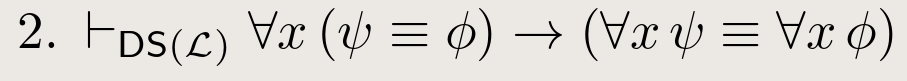
≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ true : (ɸ Ʌ ψ) → τ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣: (ɸ Ʌ ψ) → τ))





∀x (ψ ≡ ɸ) → (∀x ψ ≡ ∀x ɸ)

≡ Teorema 4.28.2

∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ (∀x ψ ≡ ∀x ɸ) ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ)

≡ Lema: Teorema 4.25.4, Leibniz ψ por ∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ (∀x ψ ≡ ∀x ɸ), τ por (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ψ) ≡ (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ɸ) ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ), ɸ por [p ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ)]

(∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ψ) ≡ (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ɸ) ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ) ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ)

≡ Lema: Teorema 4.6.2, Leibniz ψ por ∀x (ψ ≡ ɸ) ≡ ∀x (ψ ≡ ɸ), τ por true, ɸ por [(∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ψ) ≡ (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ɸ) ≡ p]

(∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ψ) ≡ (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ɸ) ≡ true

≡ Identidad

(∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ψ) ≡ (∀x (ψ ≡ ɸ) Ʌ ∀x ɸ)

≡ Bx3

(∀x ((ψ ≡ ɸ) Ʌ ψ)) ≡ (∀x ((ψ ≡ ɸ) Ʌ ɸ))

≡ Teorema 4.25.4 a ambas partes de la equivalencia

(∀x ((ψ Ʌ ψ ≡ ɸ Ʌ ψ) ≡ ψ) ≡ (∀x ((ψ Ʌ ɸ ≡ ɸ Ʌ ɸ) ≡ ɸ)

≡ Teorema 4.24.5

(∀x ((ψ ≡ ɸ Ʌ ψ ≡ ψ)) ≡ (∀x ((ψ Ʌ ɸ ≡ ɸ ≡ ɸ))

≡ Teorema 4.6.2 e identidad a cada lado de la equivalencia

∀x (ɸ Ʌ ψ) ≡ ∀x (ψ Ʌ ɸ)

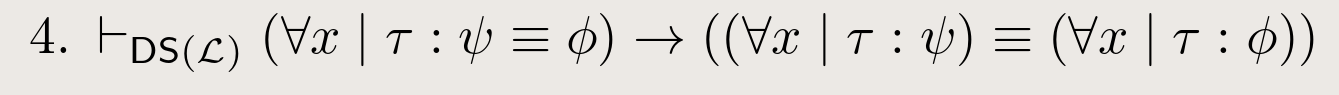
≡ Lema: Teorema 4.24.2, Leibniz ψ por ψ Ʌ ɸ, τ por ɸ Ʌ ψ, ɸ por ∀x (ɸ Ʌ ψ) ≡ ∀x p

∀x (ɸ Ʌ ψ) ≡ ∀x (ɸ Ʌ ψ)

≡ Teorema 4.6.2

True





(∀x ∣ τ : ψ ≡ ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ τ → (ψ ≡ ɸ))

≡ Teorema 4.30.1, Leibniz ɸ por [∀x ∣ p]

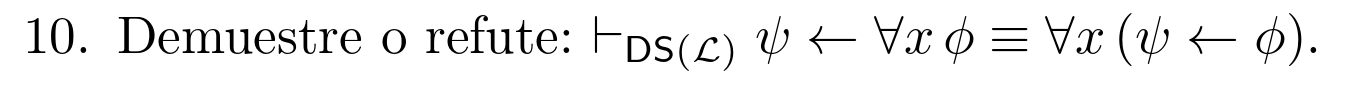
(∀x ∣ (τ → ψ) ≡ (τ → ɸ))

≡ Teorema 7.10.2

(∀x(τ → ψ) ≡ ∀x(τ → ɸ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x(τ : ψ) ≡ ∀x(τ : ɸ))



∀x (ψ ← ɸ)

≡ Axioma 13

∀x (ɸ → ψ)

→ Teorema 7.10.1

∀x ɸ → ∀x ψ

≡ Axioma 13

∀x ψ ← ∀x ɸ

Es falso, ya que no se puede quitar el para todo x de ψ, porque no se puede saber si x no está libre en ψ





Para los teoremas 7.11, x está libre en ψ

∀x(ψ → ɸ)

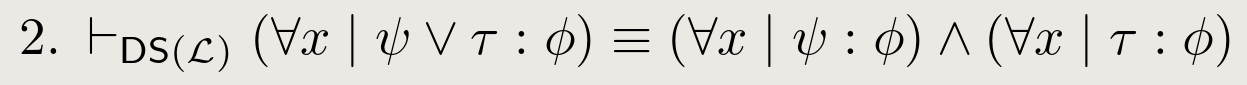
→ Teorema 7.10.1

∀x ψ → ∀x ɸ

≡ Lema: Bx1, Leibniz ψ por ∀x ψ, τ por ψ, ɸ por [p → ∀x ɸ]

ψ → ∀x ɸ





(∀x ∣ ψ ∨ τ : ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

(∀x (ψ ∨ τ) → ɸ)

≡ Teorema 4.35.5

(∀x ((ɸ → τ) Ʌ (τ → ɸ))

≡ Axioma 2 a Bx3

(∀x ((ɸ → τ) Ʌ ∀x (τ → ɸ))

≡ Azúcar sintáctico

(∀x ∣ ɸ : τ) Ʌ (∀x ∣ τ : ɸ)



Texto

Descripción generada automáticamente

1. ∀x ∀y ɸ → ∀y ɸ[x := x] Bx4
2. ∀x ∀y ɸ → ∀y ɸ Definición sustitución textual
3. ∀y ɸ → ɸ[y := y] Bx4
4. ∀y ɸ → ɸ Definición sustitución textual
5. ∀x ∀y ɸ → ɸ Transitividad 2 y 4
6. ɸ → ∀x ɸ Teorema generalización
7. ∀x ∀y ɸ → ∀x ɸ Transitividad 5 y 6
8. ∀x ɸ → ∀y ∀x ɸ Teorema generalización
9. ∀x ∀y ɸ → ∀y ∀x ɸ Transitividad 7 y 8

Ahora se quiere demostrar la otra parte de la implicación, es decir ∀y ∀x ɸ → ∀x ∀y ɸ

1. ∀y ∀x ɸ → ∀x ɸ[y := y] Bx4
2. ∀y ∀x ɸ → ∀x ɸ Definición sustitución textual
3. ∀x ɸ → ɸ[x := x] Bx4
4. ∀x ɸ → ɸ Definición sustitución textual
5. ∀y ∀x ɸ → ɸ Transitividad 2 y 4
6. ɸ → ∀y ɸ Teorema generalización
7. ∀y ∀x ɸ → ∀y ɸ Transitividad 5 y 6
8. ∀y ɸ → ∀x ∀y ɸ Teorema generalización
9. ∀y ∀x ɸ → ∀x ∀y ɸ Transitividad 7 y 8

Por teorema 4.31.3, se dice que (∀x ∀y ɸ ≡ ∀y ∀x ɸ) ≡ (∀x ∀y ɸ → ∀y ∀x ɸ) Ʌ (∀y ∀x ɸ → ∀x ∀y ɸ)

Ya habiendo demostrado ambos lados de la conjunción, se sabe que (∀x ∀y ɸ ≡ ∀y ∀x ɸ), así queda demostrado

Sección 7.3: 3, 8, 12, 14, 16, 18



Texto

Descripción generada automáticamente

∃x false

≡ Bx5

¬(∀x ¬false)

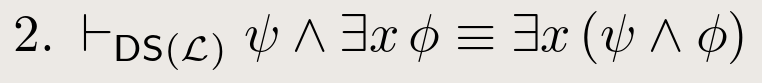
≡ Bx1, ya que x siempre está libre en una constante

¬(¬false)

≡ Teorema 4.15.6

false





Para los teoremas 7.18, x no aparece libre en ψ

∃x (ψ Ʌ ɸ)

≡ Bx5

¬(∀x ¬(ψ Ʌ ɸ))

≡ Lema: Teorema 4.25.2, Leibniz, ψ por ¬(ψ Ʌ ɸ), τ por (¬ψ ∨ ¬ɸ), ɸ por [¬∀x p]

¬(∀x (¬ψ ∨ ¬ɸ))

≡ Bx2, por el enunciado, x no aparece libre en ψ

¬(¬ψ ∨ ∀x ¬ɸ)

≡ Teorema 4.25.3

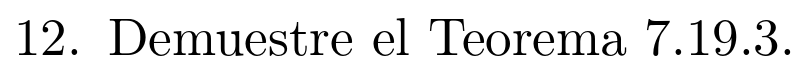
¬¬ψ Ʌ ¬∀x ¬ɸ

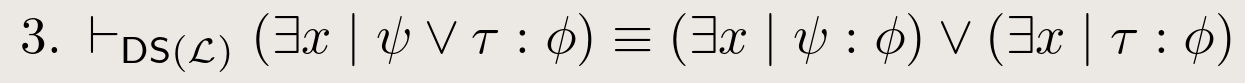
≡ Lema: Teorema 4.15.6, Leibniz, ψ por ¬¬ψ, τ por ψ, ɸ por [p Ʌ ¬∀x ¬ɸ]

ψ Ʌ ¬∀x ¬ɸ

≡ Lema: Bx5, Leibniz, ψ por ¬∀x ¬ɸ, τ por ∃x ɸ, ɸ por [ψ Ʌ p]

ψ Ʌ ∃x ɸ





(∃x ∣ ψ ∨ τ : ɸ)

≡ Teorema 7.14

¬(∀x ∣ ψ ∨ τ : ¬ɸ)

≡ Azúcar sintáctico

¬(∀x ψ ∨ τ → ¬ɸ)

≡ Teorema 4.35.5

¬(∀x (ψ → ¬ɸ) Ʌ (τ → ¬ɸ))

≡ Bx3

¬(∀x (ψ → ¬ɸ) ∨ ∀x (τ → ¬ɸ))

≡ Teorema 4.25.2

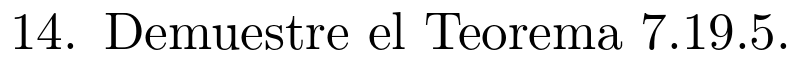
¬∀x (ψ → ¬ɸ) ∨ ¬∀x (τ → ¬ɸ)

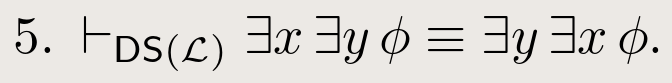
≡ Azúcar sintáctico

¬∀x ∣ (ψ : ¬ɸ) ∨ ¬∀x ∣ (τ : ¬ɸ)

≡ Teorema 7.14 a ambas partes de la equivalencia

∃x ∣ (ψ : ɸ) ∨ ∃x ∣ (τ : ɸ)





∃x ∃y ɸ ≡ ∃y ∃x ɸ

≡ Bx5

¬∀x ¬∃y ɸ ≡ ¬∀y ¬∃x ɸ

≡ Bx5

¬∀x ∀y ¬ɸ ≡ ¬∀y ∀x ¬ɸ

≡ Axioma 9

¬∀x (∀y (ɸ ≡ false)) ≡ ¬∀y (∀x (ɸ ≡ false))

→ Teorema 7.10.2

¬∀x (∀y ɸ ≡ ∀y false) ≡ ¬∀y (∀x ɸ ≡ ∀x false)

≡ Teorema 7.8.2

¬∀x (∀y ɸ ≡ false) ≡ ¬∀y (∀x ɸ ≡ false)

→ Teorema 7.10.2

¬(∀x ∀y ɸ ≡ ∀x false)) ≡ ¬(∀y ∀x ɸ ≡ ∀y false))

≡ Teorema 7.8.2

¬(∀x ∀y ɸ ≡ false) ≡ ¬(∀y ∀x ɸ ≡ false)

≡ Axioma 9

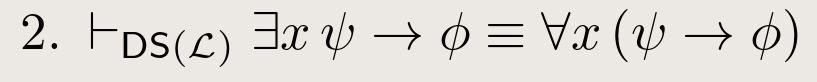
¬¬(∀x ∀y ɸ)≡ ¬¬(∀y ∀x ɸ)

≡ Teorema 4.15.6

∀x ∀y ɸ ≡ ∀y ∀x ɸ

Como se llegó a un teorema, la demostración es válida





Para los teoremas 7.20, x no aparece libre en ɸ

(∃x ψ → ɸ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

≡ Lema: Bx5, Leibniz, ɸ por [(p → ɸ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))]

( ¬∀x ¬ψ → ɸ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

≡ Lema: Teorema 4.31.1, Leibniz ɸ por [p ≡ (∀x (ψ → ɸ))]

(¬ɸ → ∀x ¬ψ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

≡ Lema: Bx1, ɸ por [(p → ∀x ¬ψ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))], x no está libre en ɸ, tampoco en ¬ɸ

(∀x ¬ɸ → ∀x ¬ψ) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

← Lema: Teorema 7.10.1, Leibniz ɸ por [p ≡ (∀x (ψ → ɸ))]

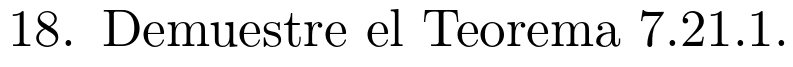
(∀x (¬ɸ → ¬ψ)) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

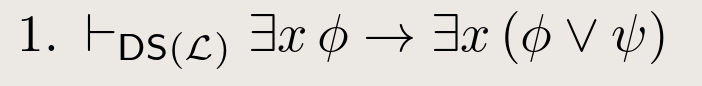
≡ Lema: Teorema 4.31.1, Leibniz ψ por (¬ɸ → ¬ψ), τ por (ψ → ɸ), ɸ por [(∀x p ≡ (∀x (ψ → ɸ))]

(∀x (ψ → ɸ)) ≡ (∀x (ψ → ɸ))

≡ Teorema 4.6.2

true



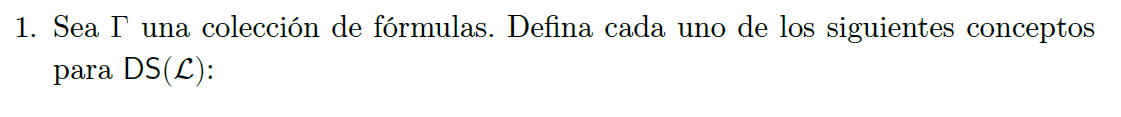


∃x (ɸ ∨ ψ)

← Lema: Teorema 4.35.1, Leibniz, ψ por (ɸ ∨ ψ), τ por ɸ, ɸ por [∃x p]

∃x ɸ

Sección 7.4: 1,2,6,7,8,9,10



Captura de pantalla de un celular

Descripción generada automáticamente

Para todas las definiciones, tan solo se cambian las proposiciones por predicados, ya que esto es lo que se usa en el sistema DS()



En ningún momento se dice que x no esté libre en ɸ, por lo tanto no se puede usar el Bx1

Por ejemplo si tomamos ∀x (ɸ → ψ), debería ser equivalente a (ɸ → ψ)

∀x (ɸ → ψ)

→ Teorema 7.10.1

∀x ɸ → ∀x ψ

Como no tenemos que x no está libre en ɸ, ni en ψ, no podemos usar Bx1 para quitar el para todos, por lo tanto es falso